Geometría del elipsoide

Sistema Geodésico de Referencia

* Un SGR está definido por parámetros geodésicos fundamentales obtenidos a partir de mediciones sobre la Tierra:

- a - Semieje mayor del elipsoide
- J2 - Factor dinámico
- GM - Constante Gravitacional
- ω - Velocidad angular de la Tierra

Queda definido a partir de la adopción de un elipsoide de referencia, posicionado y orientado en relación a la superficie de la Tierra. Se accede a ellos a través de las redes geodésicas de referencia.

\- La adopción de un elipsoide de revolución NO es accidental. Es la figura resultante del movimiento de partículas sometidas a rotación y bajo la acción de un campo gravitacional

Ejemplos de SGR: WGS84, GRS80 entre otros.

Un poco de historia

Internacional de 1924

a=6378388.000 m

f= 1/297.000

γ_a= 978.049000 gal

ω=0.72921151. $10^{-4}s^{-1}$

Luego del Sputnik (1957) estos valores comenzaron a cambiar ya que contaban con un información astrogeodésica.

En 1979 se adopta a GRS80 como elipsoide de referencia el cual está basado en la teoría de un elipsoide geocéntrico y equipotencial.

a=6378137.000 m

GM= 3986005.$10^{8}m^{3}s^{-2}$

f=1/298.257222101

ω=0.7292115. 10^{-4}rad s^{-1}

WGS84

Se desprende de GRS80. Es un sistema de referencia convencional (CTRS). Cumple con:

- Es geocéntrico y la definición del CM incluye la atmosfera
- La escala es la del SI
- La orientación está dada por la definicion del BIH en 1984
- Su evolucion temporal en orientacion satisface NNR

El origen de WGS84 y su orientación sirven de origen geométrico y orientación para el elipsoide homónimo.

$$a=6378137.000 \text{ m}$$

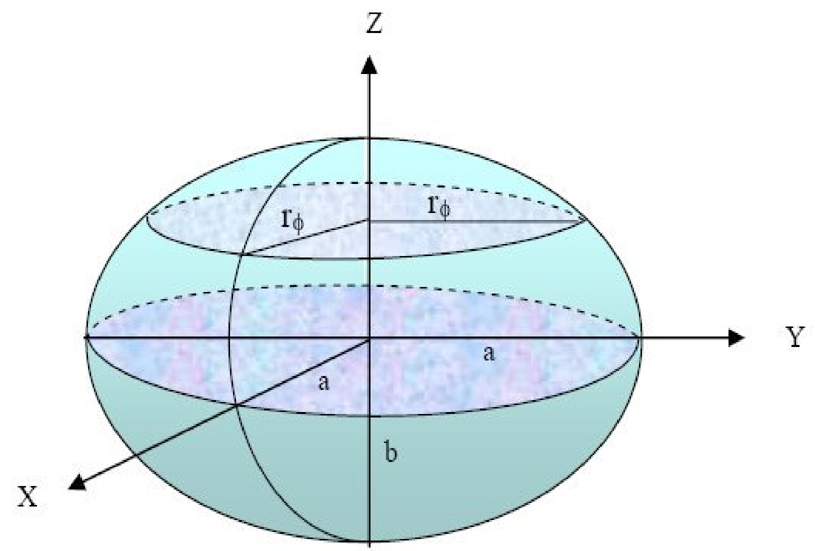
$$f=1./298.257223563$$

$$GM= 3986004.418.10^{8} m^{3}s^{-2}$$

$$\omega=0.7292115.\ 10^{-4} \text{rad s}^{-1}$$

El achatamiento no coincide con el de GRS80 debido al truncamiento en el desarrollo.

El elipsoide



Ecuación de un elipsoide triaxial

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

F = foco

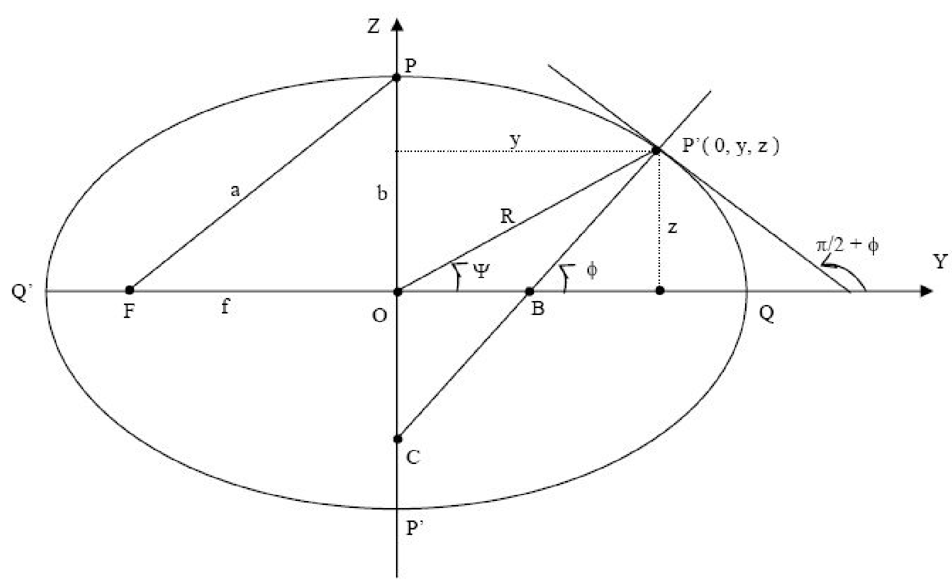
f = distancia focal

a = semieje mayor

b = semieje menor

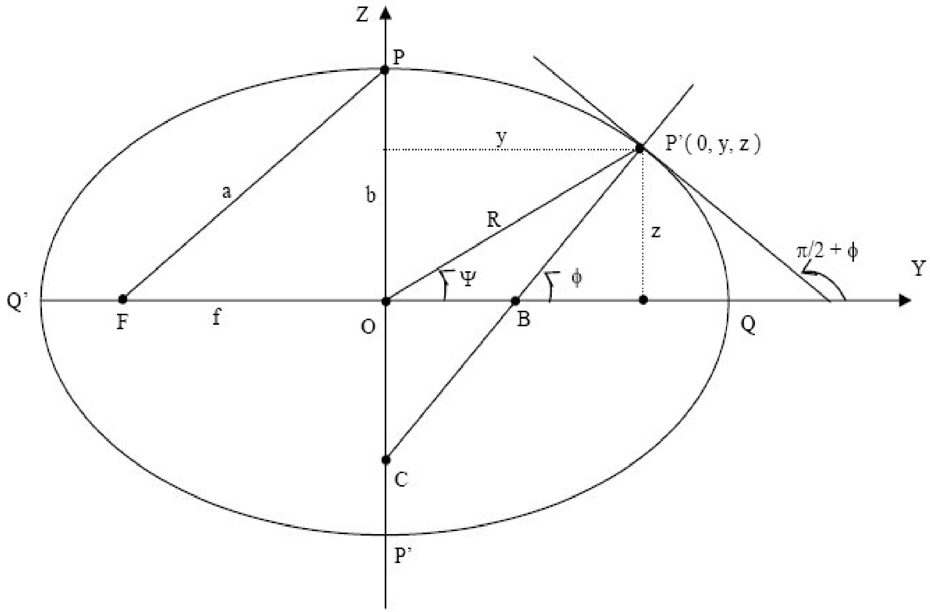
ψ = latitud geocéntrica

ϕ = latitud elipsóidica



Corte YZ: Elementos de una elipse

Relaciones geométricas

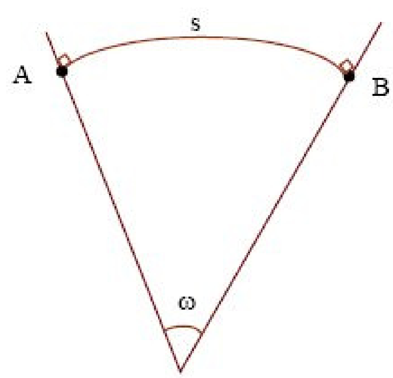


$$f = \frac{a-b}{a}$$

$$e^2 = 2f - f^2$$

$$e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$$

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$



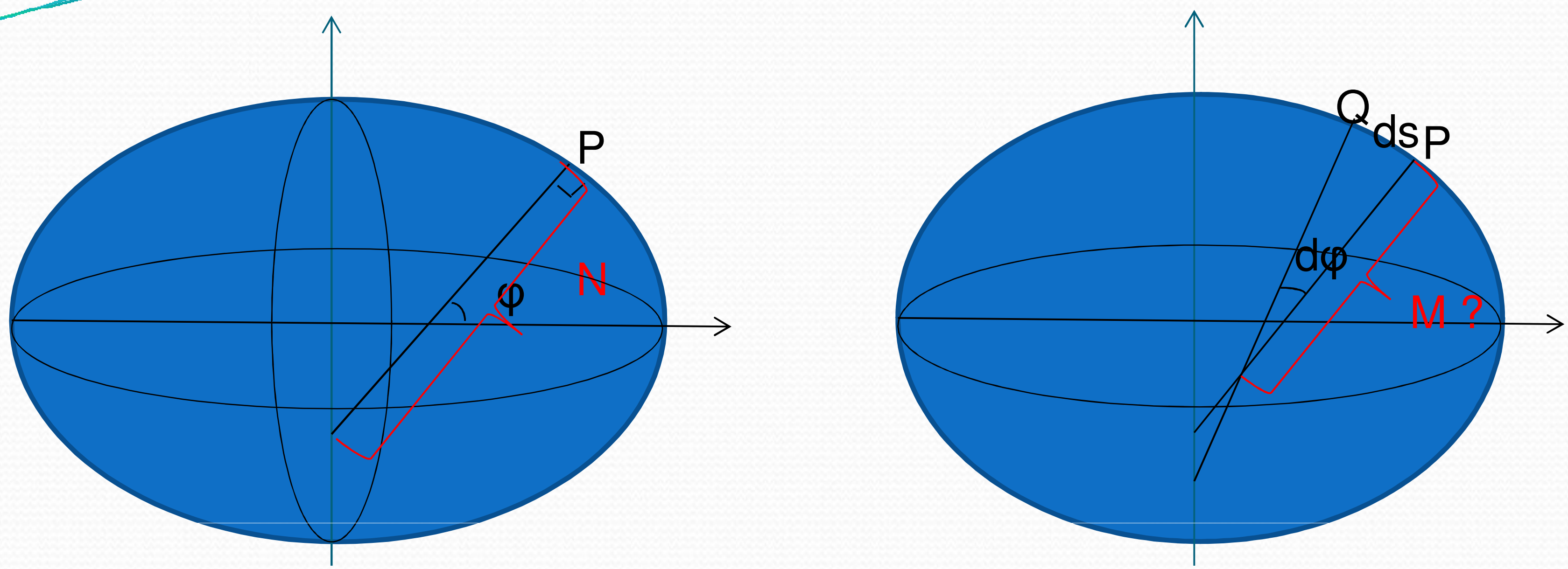
$$\rho = \frac{\omega}{s}$$

ρ = radio de curvatura

s = distancia sobre una curva

ω = ángulo formado por las normales que pasan por A y B

Radios de Curvatura



N: radio de curvatura del primer vertical, gran normal o radio de curvatura de la sección normal

Distancia medida sobre la dirección normal al elipsoide desde P hasta la intersección de la línea con el eje z.

N': pequeña normal.

Distancia medida sobre la dirección normal al elipsoide desde P a la intersección con el plano del ecuador.

M: radio de curvatura de la sección meridiana.

Suponiendo un desplazam. diferencial, es aquel radio del único círculo que contiene al segmento ds.

Coordenadas geodésicas vs coordenadas elipsóidicas

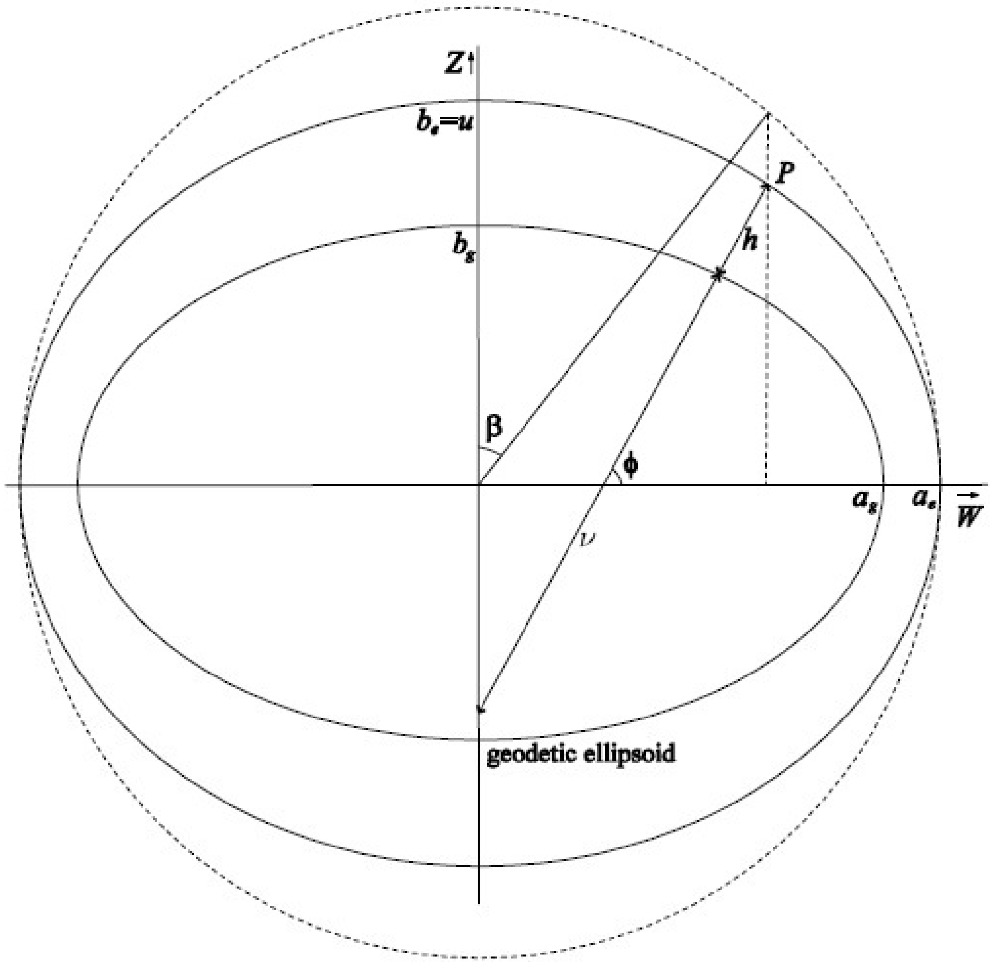


Fig. 1. Meridional cross section (because of rotational symmetry) of the relationships among 2D Cartesian (Z, W), geodetic (ϕ, h) and (oblate) ellipsoidal (β, u) coordinates for an arbitrary point P.

Fuente: Featherstone & Claessens, 2007

El sistema geodésico no es ortogonal. Sí lo es el sistema de coordenadas oblatas o elipsóidicas.

Este ultimo es muy usado en la descripción del campo gravitacional. Es el sistema que involucra la descomposición en armónicos elípticos.

De oblatas a cartesianas

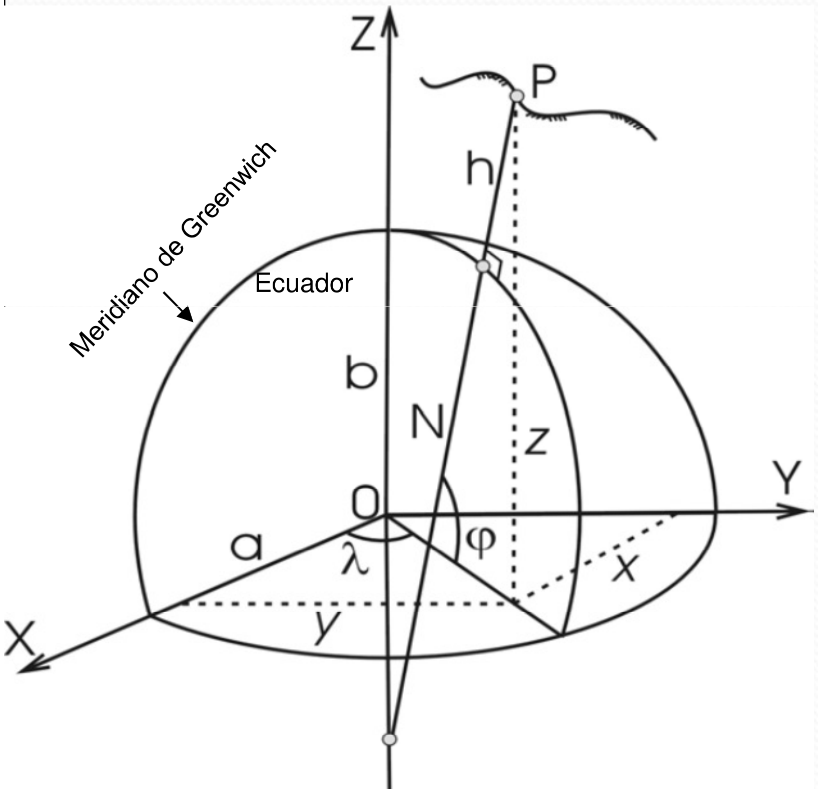
$$X = \sqrt{u^2 + E_e^{\,2}}\,\sin\beta\cos\lambda$$

$$Y = \sqrt{u^2 + E_e^{\,2}}\,\sin\beta\sin\lambda$$

$$Z = u\cos\beta$$

$$E_e^2 = a_e^2 e_e^2 = a_e^2 - b_e^2$$

De geodésicas a cartesianas



$$X = (N + h)\cos\varphi\,\cos\lambda\,,$$

$$Y = (N + h)\cos\varphi\,\sin\lambda\,,$$

$$Z = \left(\frac{b^2}{a^2}N + h\right)\sin\varphi\,.$$

$$\lambda = \arctan\frac{Y}{X}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2(\varphi)}}$$

De cartesianas a geodésicas

Resolución: No iterativa

$$\varphi = \arctan \frac{Z + e'^2\, b \sin^3\theta}{p - e^2\, a \cos^3\theta}$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X}$$

$$h = \frac{p}{\cos\varphi} - N$$

$$\theta = \arctan \frac{Z\, a}{p\, b}$$

Resolución: iterativa

$$\frac{Z}{p} = \left(1 - e^2 \frac{N}{N+h}\right) \tan\varphi$$

$$\tan\varphi = \frac{Z}{p} \left(1 - e^2 \frac{N}{N+h}\right)^{-1}$$

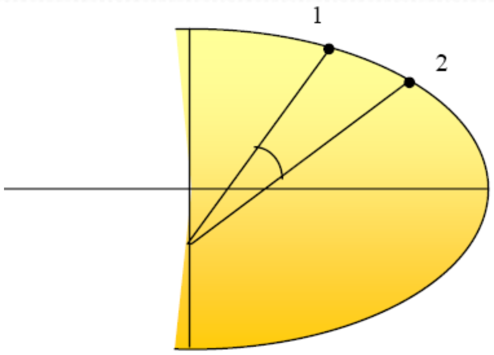
$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N+h)\cos\varphi$$

$$h = \frac{p}{\cos\varphi} - N$$

La longitud de arco en una elipse meridiana

$$s = a(1-e^2)[A(\phi_2-\phi_1)''sen1'' - \frac{1}{2}B(sen2\phi_2 - sen2\phi_1) + \frac{1}{4}C(sen4\phi_2 - sen4\phi_1) -$$

$$+\frac{1}{6}D(sen6\phi_2 - sen6\phi_1) + \frac{1}{8}E(sen8\phi_2 - sen8\phi_1) - \frac{1}{10}F(sen(10\phi_2 - sen10\phi_1)]\ldots$$



$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \ldots\ldots..$$

$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10} + \ldots\ldots..$$

$$C = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10} + \ldots\ldots..$$

$$D = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10} + \ldots\ldots..$$

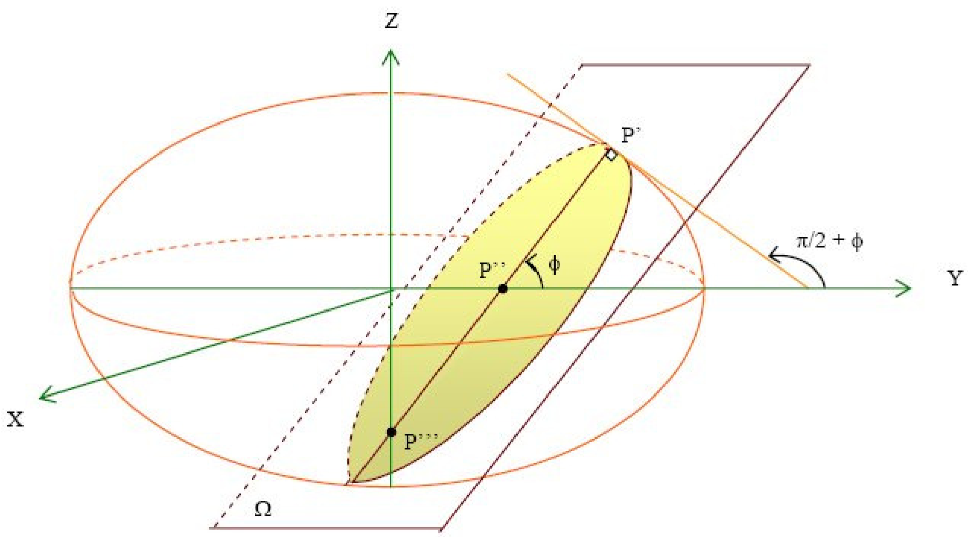
$$E = \frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10} + \ldots\ldots..$$

$$F = \frac{693}{131072}e^{10} + \ldots\ldots..$$

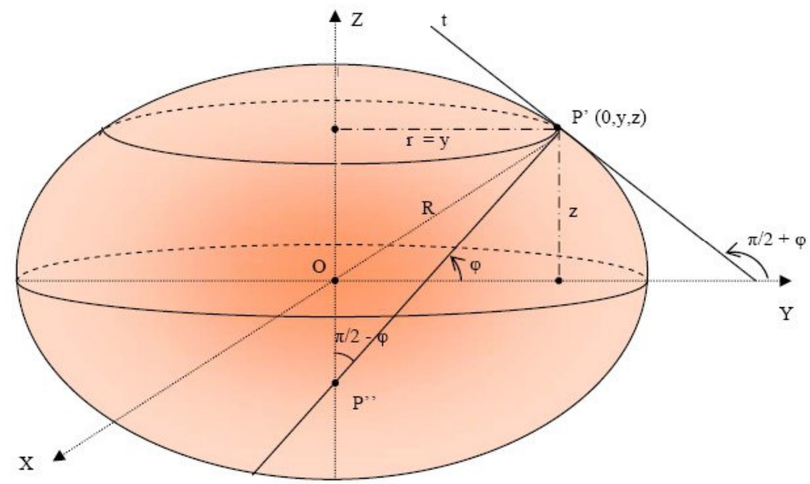
Secciones Normales

- Plano Normal: cualquier plano que contenga a la normal a un punto P
- Sección Normal: curva resultante de la intersección de un plano normal con la superficie elipsóidica.

Las principales: sección meridiana y la sección del primer vertical



Sección normal del primer vertical



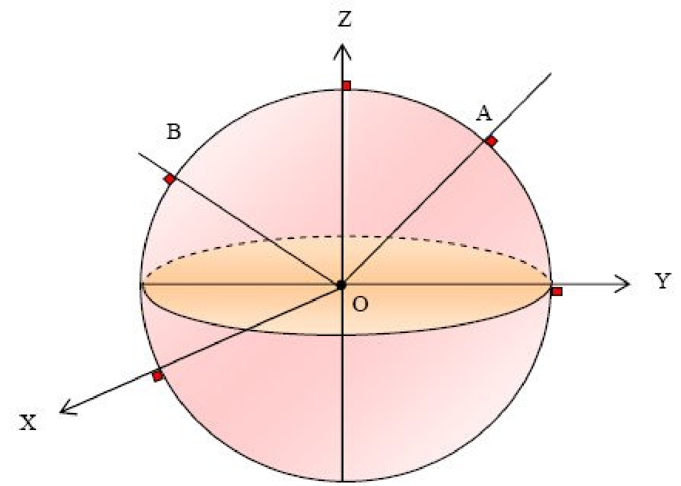
Secciones oblicuas y su radio de curvatura

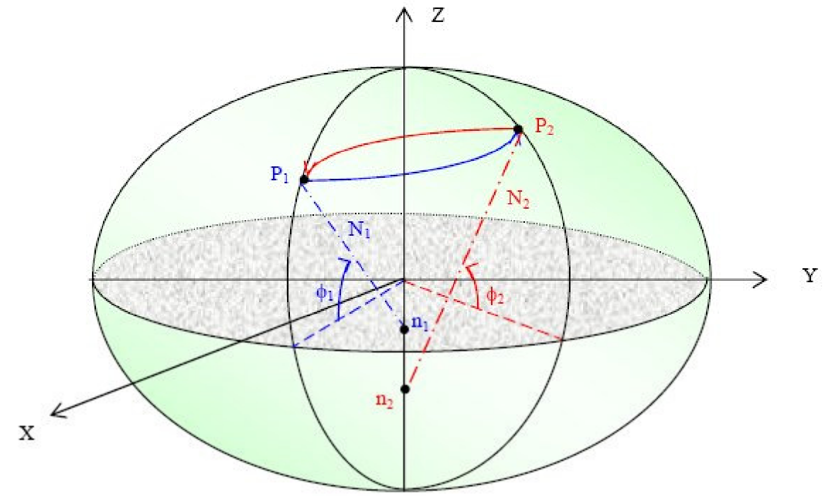
$$r = N\cos(\varphi)$$

Secciones recíprocas y el problema en la determinación de la geodésica

Para la esfera

Para el elipsoide



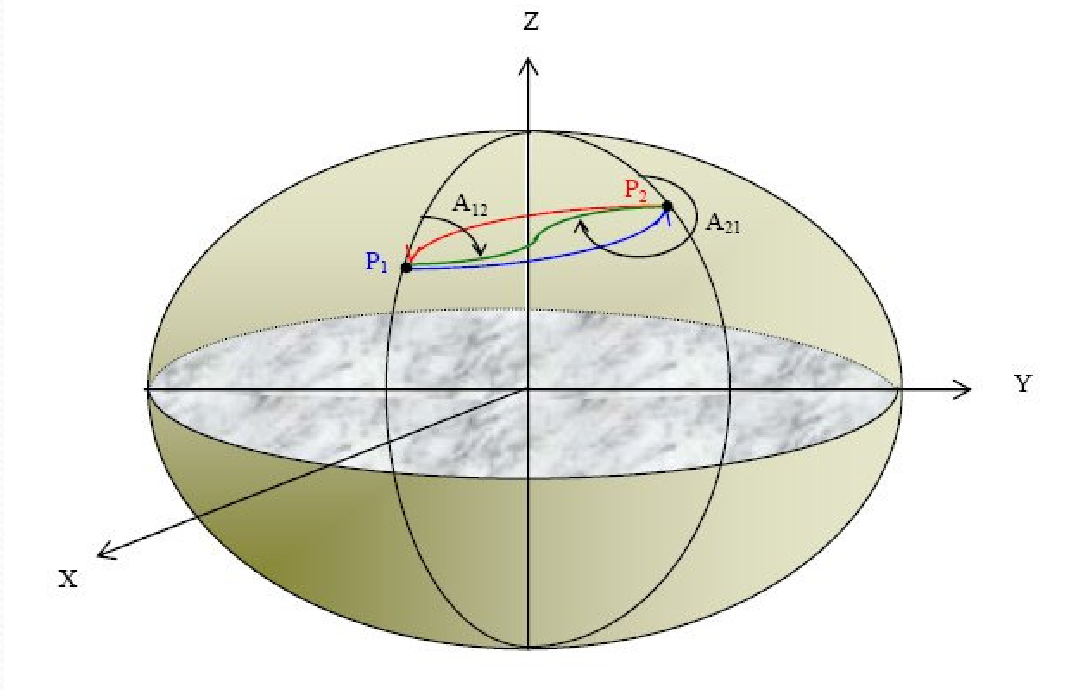


Secciones normales: directa (de P1 a P2) y recíproca (de P2 a P1).

Las secciones directa y recíprocas coinciden sólo cuando ambos puntos poseen la misma latitud o la misma longitud.

La geodésica:

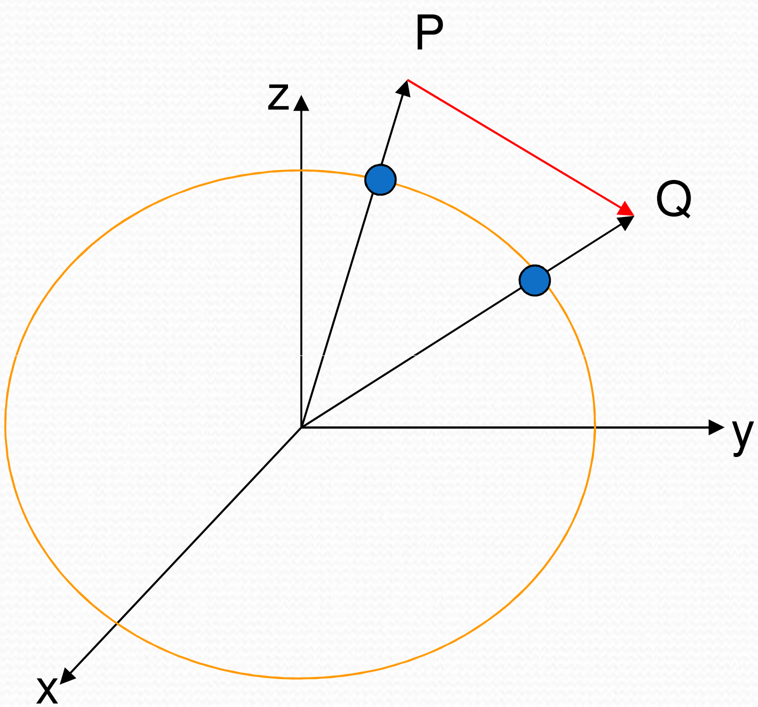
Se la define como “la curva que representa el menor camino entre dos vértices geodésicos sobre el elipsoide de revolución. Se ubica en el medio de ambas secciones normales”

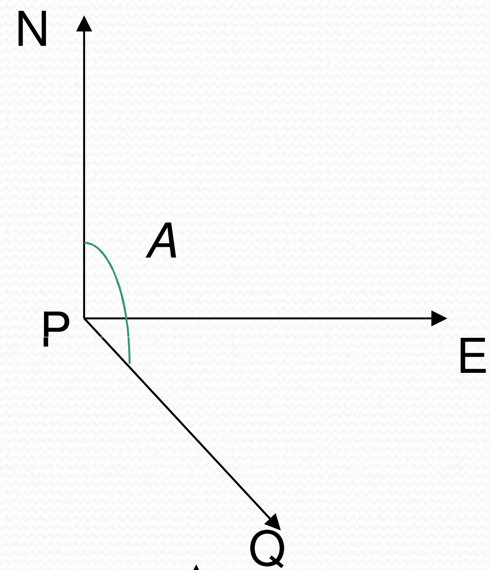


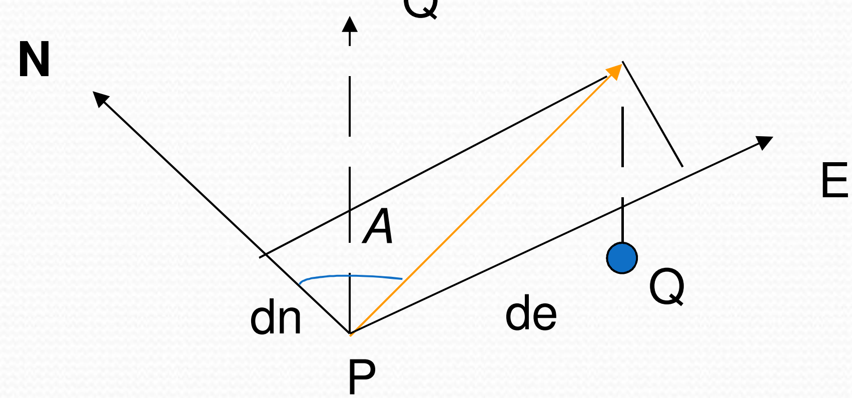
Problema directo: consiste en calcular la coordenada de un punto a partir de conocida la posición de un primer punto, el acimut y la distancia entre ambos.

Problema inverso: a partir de las coordenadas de dos puntos, se busca el acimut directo y la distancia real entre ambos

Vector “línea de base”

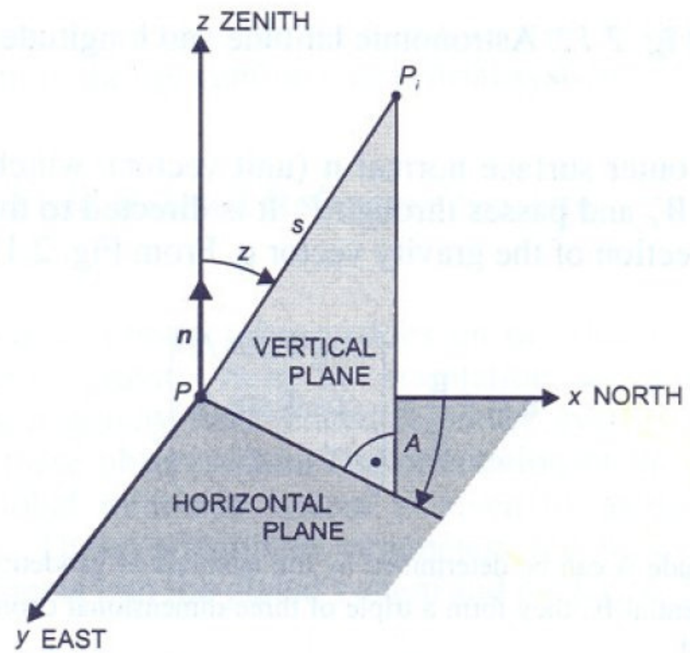


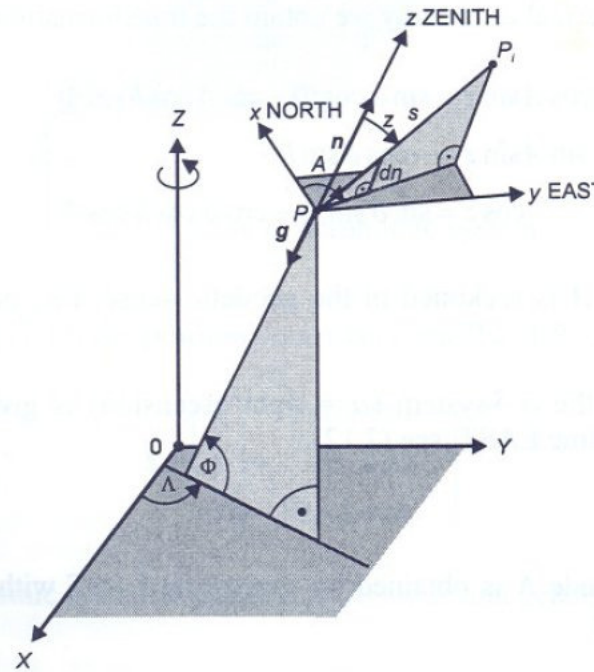




$$|\overrightarrow{P-Q}| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

Sistema local de coordenadas y su relación con uno global





$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{X},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_3(180° - \Lambda)\mathbf{R}_2(90° - \Phi)\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\Phi\cos\Lambda & -\sin\Lambda & \cos\Phi\cos\Lambda \\ -\sin\Phi\sin\Lambda & \cos\Lambda & \cos\Phi\sin\Lambda \\ \cos\Phi & 0 & \sin\Phi \end{pmatrix}.$$

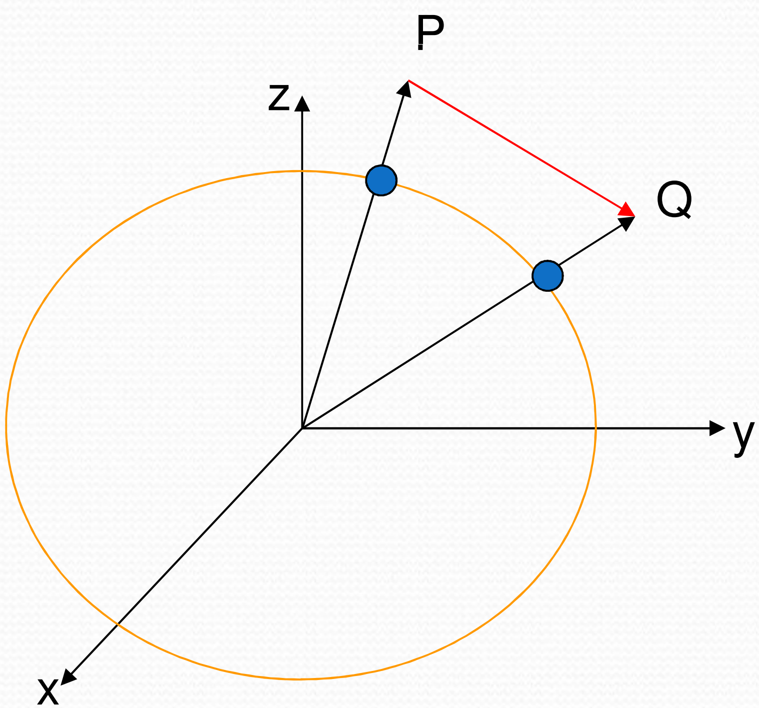
$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

- En un sistema cartesiano, con origen en el geocentro:
- (dx, dy, dz) = (8100.929, 30905.850, -30069.298)

En un sistema cartesiano, con origen en P:

- (dn, de, du) = (-37653.889, 22519.524, -124.19)



Acimut: 149° 7' 4 "

Distancia plana: 43874.358 m

Distancia geodésica: 43873.26
Acimut: 149° 7' 3.99"

- Vector línea de base ≠ línea geodésica

Referencias

- Drewes&Sanches, Sistemas de Referencia en Geodesia.
- Hofmann Wellenhof &Moritz, Physical Geodesy.
- Featherstone W. E. & Claessens S. J. Closed-form transformation between geodetic and ellipsoidal coordinates.
- Torgue W., Geodesy. Capítulo 2.
- Dalozana Regiane, Geometría do elipsóide.
- Freitas Silvio R.C. , Sistemas Geodésicos de Referência e Bases Cartográficas- Aspectos Introductórios.